

О ВЛИЯНИИ ИСПАРЕНИЯ ИЛИ ИНФИЛЬТРАЦИИ НА СВОБОДНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ГРУНТОВЫХ ВОД В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

Береславский Э.Н., Прирез А.В.

Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации
eduber@mail.ru

В рамках теории плоской установившейся фильтрации несжимаемой жидкости по закону Дарси рассматриваются две схемы, моделирующие фильтрационные течения под шпунтом Жуковского через грунтовой массив, подстилаемый непроницаемым основанием или сильнопроницаемым напорным водоносным горизонтом. Для исследования влияния испарения или инфильтрации на свободную поверхность грунтовых вод формулируются смешанные краевые задачи теории аналитических функций, которые решаются с помощью метода Полубариновой-Кочиной.

Ключевые слова: фильтрация, инфильтрация, испарение, грунтовые воды, свободная поверхность, шпунт Жуковского, метод Полубариновой-Кочиной, комплексная скорость, конформные отображения, уравнения класса Фукса.

Задача об обтекании шпунта впервые была исследована Н.Е. Жуковским [1], где видоизмененный им метод Кирхгофа в теории струй использован для решения задач со свободной поверхностью и введена специальная аналитическая функция, которая широко применяется в теории фильтрации и подземной гидромеханике. Работа Н.Е. Жуковского [1] открыла возможность математического моделирования движений под шпунтом Жуковского и положила начало исследованиям указанного класса фильтрационных течений.

Ниже приводится единообразная методика решения задач обтекания шпунта, которая позволяет учесть при исследовании такие необходимые фильтрационные характеристики, как испарение или инфильтрация со свободной поверхности, что дает возможность оценить влияние последних на картину явления. Для этой цели используется метод П.Я. Полубариновой-Кочиной [2–6]. Учет специфики и характерных особенностей рассматриваемых течений позволяет представить решение через элементарные функции, что делает его использование наиболее простым и удобным.

1. Обтекание шпунта Жуковского при наличии в основании горизонтального водоупора. Рассмотрим двумерную установившуюся фильтрацию жидкости при обтекании шпунта Жуковского длины S в однородном и изотропном слое грунта мощности T , подстилаемом горизонтальным непроницаемым основанием при равномерном испарении со свободной поверхности интенсивности ε ($0 < \varepsilon < 1$). Течение обеспечивается

поступлением воды с поверхности земли с неизменным во времени слоем жидкости.

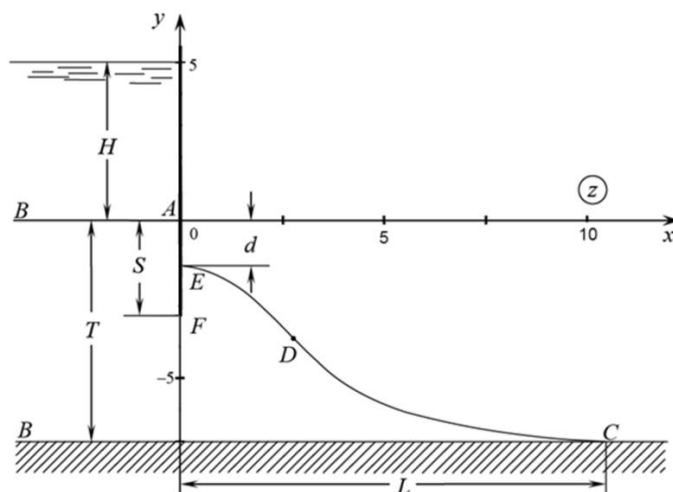


Рис. 1. Область течения задачи.

Вводится комплексный потенциал движения $\omega = \varphi + i\psi$, где φ – потенциал скорости, ψ – функция тока, и комплексная координата $z = x + iy$, отнесенные к κT и T , где $\kappa = \text{const}$ – коэффициент фильтрации грунта. Задача состоит в нахождении комплексного потенциала $\omega(z)$ как функции, аналитической в области фильтрации z и удовлетворяющей следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} AB: y = 0, \varphi = -H; \quad BC: y = -T, \psi = 0; \\ CDE: \varphi = -y + h_c, \psi = -\varepsilon x + Q; \quad EA: x=0, \psi = Q. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь h_c – статическая высота капиллярного поднятия грунтовой воды, Q – искомый фильтрационный расход воды. Полагая во втором условии (1.1) для участка CDE $x = L$, получим

$$Q = \varepsilon L. \quad (1.2)$$

Для решения задачи используем метод Полубариновой-Кочиной [2–6], который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса [7].

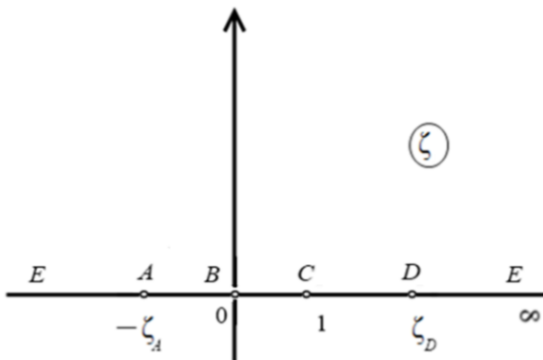


Рис. 2. Область вспомогательной переменной ζ .

Вводится вспомогательная переменная ζ и функции: $z(\zeta)$ – конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ на область z (соответствие точек указано на рисунке 2), комплексная скорость $w = d\omega/dz$, а также

$$Z = dz/d\zeta, \quad \Omega = d\omega/d\zeta. \quad (1.3)$$

Определяя характеристические показатели функций Z и Ω около особых точек [2,3], найдем, что они являются линейными комбинациями двух ветвей следующей функции Римана [2,3,7]:

$$P \left\{ \begin{matrix} -\zeta_A & 0 & 1 & \zeta_D & \infty \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1+v}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1-v}{2} & 2 & 2 \end{matrix} \right\} \zeta = \frac{Y}{\zeta \sqrt{(\zeta + \zeta_A)(1-\zeta)^{(1+v)}}}, Y = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \zeta_D & \infty \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1+v}{2} \\ \frac{1}{2} & v & 2 & -\frac{v}{2} \end{matrix} \right\} \zeta, \quad (1.4)$$

где $\pi v = 2 \arccos \sqrt{\varepsilon}$. Видно, что точка $\zeta = -\zeta_A$ – обыкновенная точка для функции Y , представляющей последний символ Римана, ему соответствует следующее линейное дифференциальное уравнение класса Фукса с четырьмя регулярными особыми точками:

$$Y'' + \left(\frac{1}{2\zeta} + \frac{1-v}{\zeta-1} - \frac{1}{\zeta-\zeta_D} \right) Y' + \frac{v(1+v)\zeta + \lambda_0}{4\zeta(\zeta-1)(\zeta-\zeta_D)} Y = 0, \quad (1.5)$$

где λ_0 – аксессуарный параметр. Напомним, что в уравнении (1.5) прообраз ζ_D вершины разреза D , а также аксессуарная постоянная λ_0 остаются неизвестными при постановке задачи.

Обратимся к области комплексной скорости w (рисунок 3), соответствующей граничным условиям (1.1).

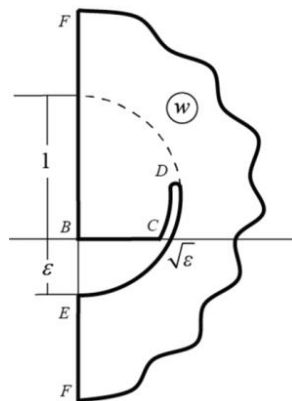


Рис. 3. Область комплексной скорости w .

Это область, представляющая собой круговой четырехугольник с двумя прямыми углами, углом πv при вершине C и разрезом с вершиной в точке D , принадлежит классу многоугольников в полярных сетках [8–11]. Учитывая специфические свойства таких областей, связанные с обилием прямых углов и

наличием разреза, удобно произвести замену переменных $\zeta = \text{th}^2 t$, которая преобразует уравнение (1.5) к виду

$$\begin{aligned} & \left[(\zeta_D - 1) \text{ch}^2 t + 1 \right] \text{ch}^2 t Y'' + \left[v (\zeta_D - 1) \text{ch}^2 t + 1 + v \right] \text{sh} 2t Y' + \\ & + \left[(v^2 + v + \lambda_0) \text{ch}^2 t - v^2 - v \right] Y = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

а верхнюю полуплоскость ζ переводит в горизонтальную полуполосу $\text{Re } t > 0, 0 < \text{Im } t < \pi/2$ плоскости t (рисунок 4).

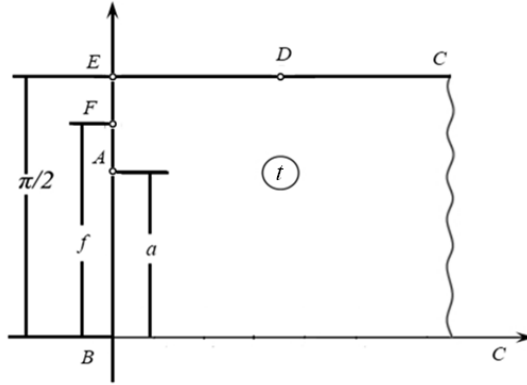


Рис. 4. Горизонтальная полуполоса плоскости t .

При этом интегралы Y принимают следующий вид:

$$Y_1(t) = \frac{\text{chtchvt} + C \text{shtshvt}}{\text{ch}^{1+v} t}, \quad Y_2(t) = \frac{\text{chtshvt} + C \text{shtchvt}}{\text{ch}^{1+v} t}, \quad (1.7)$$

где $C = \text{ctg } f \text{ ctg } vf$, a и f ($0 < a < f < \pi/2$) – неизвестные ординаты точек A и F плоскости t . Принимая во внимание соотношения (1.7), и учитывая, что $w = d\omega/dz$, получим:

$$\frac{dz}{dt} = M \frac{\text{chtchvt} + C \text{shtshvt}}{\Delta(t)}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\varepsilon} M \frac{\text{chtshvt} + C \text{shtchvt}}{\Delta(t)}, \quad (1.8)$$

$$\Delta(t) = \sqrt{\sin^2 a + \text{sh}^2 t},$$

где $M > 0$ – масштабная постоянная моделирования.

При увеличении высоты вакуума, обусловленного капиллярными силами в грунте и напора в бьефе, и уменьшении интенсивности испарения, мощности слоя и длины шпунта величина d уменьшается, т. е. увеличивается ордината точки D выхода кривой депрессии из-под шпунта. Что касается величины L , то с повышением h_c , T , напора в бьефе и с уменьшением интенсивности испарения и длины шпунта ширина растекания жидкости по водоупору увеличивается. В целом зависимости d и L от параметров T и h_c близки к линейным [12].

2. Обтекание шпунта Жуковского при наличии в основании сильнопроницаемого горизонта, содержащего напорные подземные воды (схема 2). В отличие от схемы 1 рассмотрим теперь другой предельный случай, возникающий в задаче при обтекании шпунта Жуковского, когда слой грунта подстилается хорошо проницаемым напорным водоносным горизонтом BC ,

напор в котором имеет постоянное значение H_0 , и на свободной поверхности происходит равномерная инфильтрация интенсивности ε ($0 \leq \varepsilon < 1$).

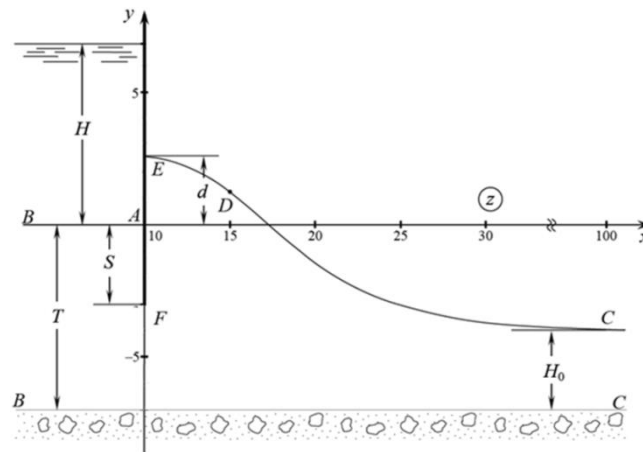


Рис. 5. Область течения задачи.

Тогда вдали от шпунта (при $x \rightarrow \infty$) кривая депрессии горизонтальна и расположена на высоте H_0 над водоносным горизонтом. В этой модели граничные условия (1.1) на участках AB и EA сохраняются, а условия на границах BC и CDE заменяются следующими:

$$BC: y = -T, \phi = -H_0; CDE: \phi = -y - T, \psi = \varepsilon x + Q. \quad (2.1)$$

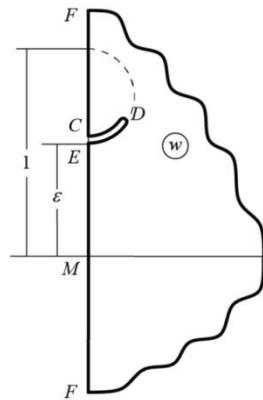


Рис. 6. Область комплексной скорости w .

Область комплексной скорости w , соответствующая краевым условиям (1.1), (2.1), которая представляет собой круговой треугольник с двумя прямыми углами и с разрезом с вершиной в точке D , изображена на рисунке 6. Подобные многоугольники весьма типичны в задачах о дренаже [13–17], при движении грунтовых вод через плотины с диафрагмами [18,19] и др.

Ниже предлагается способ, основанный на непосредственном использовании уравнения фуксового типа, интегралами которого являются тригонометрические функции синус и косинус. В верхней полуплоскости ζ удобно выбрать иное соответствие точек:

$$-\infty = \zeta_D < \zeta_E = 0 < \zeta_A < \zeta_B < \zeta_C = 1 < \zeta_D = \infty. \quad (2.2)$$

Определяя характеристические показатели функций Z и Ω около особых точек [2,3], найдем, что в данном случае они являются линейными комбинациями двух ветвей следующей функции Римана [2,3,7]:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \zeta_A & \zeta_B & 1 & \infty \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 4 \end{array} \right\} = \frac{Y}{(\zeta_B - \zeta)(1 - \zeta)\sqrt{(\zeta_A - \zeta)}}, Y = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right\} \zeta. \quad (2.3)$$

Из рассмотрения области w (рисунок б) и соотношения (2.3) видно, что точки $\zeta = \zeta_A$ и $\zeta = \zeta_B$ – обыкновенные точки для функции Y , представляющей последний символ Римана, ему соответствует такое линейное дифференциальное уравнение класса Фукса с тремя регулярными особыми точками:

$$\zeta(1 - \zeta)Y'' + \left(\frac{1}{2} - \zeta\right)Y' + Y = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) – это уравнение Гаусса [7,20]. Его канонические интегралы в окрестности точки $\zeta = 0$ выражаются через гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, \zeta)$ и в данном случае имеют вид

$$Y_1(\zeta) = F\left(-1, 1, \frac{1}{2}, \zeta\right), Y_2(\zeta) = \sqrt{\zeta} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \zeta\right). \quad (2.5)$$

Замена переменных $\zeta = \sin^2 t$ переводит верхнюю полуплоскость ζ в вертикальную полуполосу $0 < \text{Re } t < \pi/2, \text{Im } t > 0$ плоскости t , а интегралы (2.5) преобразует к виду

$$Y_1 = \sin 2t, Y_2 = \cos 2t. \quad (2.6)$$

Принимая во внимание (2.6) и учитывая, что $w = d\omega/dz$, придем к искомым зависимостям

$$\frac{dz}{dt} = iM \frac{\sin 2(t - f)}{\Delta(t)}, \frac{d\omega}{dt} = -\varepsilon M \frac{\sin 2f \sin 2(t - m)}{\sin 2m \Delta(t)}, \quad (2.7)$$

$$\Delta(t) = (\sin^2 b - \sin^2 t) \cos t \sqrt{\sin^2 a - \sin^2 t},$$

где m и f – прообразы точек M и F ($0 < m < f < a < b < \pi/2$), связанные соотношением

$$\text{tg } 2m \text{ ctg } 2f = \varepsilon. \quad (2.8)$$

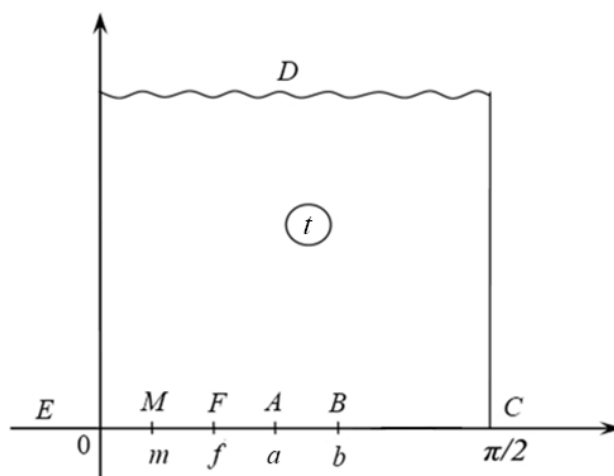


Рис. 7. Горизонтальная полуполоса плоскости t .

Отметим предельный случай течения, связанный с отсутствием инфильтрации, т.е. при $\varepsilon = 0$. Учитывая связь между параметрами m, f и ε (2.8), видим, что в случае, когда $\varepsilon = 0$, решение задачи вытекает из зависимостей (2.7) при $m = 0$, т.е. когда в плоскости w точки кривой депрессии C и E сливаются в начале координат с точкой M нулевой скорости.

Увеличение интенсивности инфильтрации и напоров в бьефе и нижележащем горизонте, и уменьшение мощности слоя и длины шпунта приводят к уменьшению величины d . В первой схеме к подобному поведению этой величины приводило, наоборот, уменьшение интенсивности испарения. Для абсолютного большинства расчетных вариантов величина $d < 0$, т. е. кривая депрессии поднимается выше оси абсцисс. При изменении параметра T величина $T - d$ приблизительно равна 9.58 и является постоянной для рассматриваемых значений мощности слоя [12].

Литература

1. Жуковский Н.Е. Просачивание воды через плотины // Опытно-мелиоративная часть НКЗ. 1923. Вып. 30. С. 30–52.
2. Полубаринова–Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. – М.; – Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 142 с.
3. Полубаринова–Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-изд. – М.: Наука, 1977, 664 с.
4. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. – М.: Гостехиздат, 1953, 616 с.
5. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967) / Отв.ред. Полубаринова-Кочина П. Я. – М.: Наука, 1969. 545 с.
6. Михайлов Г.К., Николаевский В.Н. Движение жидкостей и газов в пористых средах // Механика в СССР за 50 лет. – М.: Наука, 1970. Т. 2. С. 585-648.
7. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; – Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
8. Коппенфельс В., Штальман Ф. Praxis der konformen Abbildung. Berlin: Springer, 1959. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. – М.: Изд-во Иност. лит., 1963. 406 с.
9. Береславский Э.Н., Кочина П.Я. О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и

аэромеханике // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 3–7.

10. Кочина П.Я., Береславский Э.Н., Кочина Н.Н. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч.1.Препринт №567. – М.: Ин-т проблем механики РАН,1996.122 с.

11. Береславский Э.Н., Кочина П.Я. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов // Изв. РАН. МЖГ. 1997. №5. С.9-17.

12. Береславский Э.Н., Пестерев Е.В. О двух предельных моделях, возникающих в задаче Жуковского об обтекании шпунта // Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 3. С. 21–33.

13. Ведерников В.В. К теории дренажа // Докл. АН СССР. 1939. Т. XXIII. №4. С.335–337.

14. Ведерников В.В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. – М.; – Л.: Госстройиздат,1939.248 с.

15. Ведерников В.В. К теории дренажа // Докл. АН СССР. 1948. Т. LIX. №6. С.1069–1072.

16. Ведерников В.В. Фильтрация при наличии дренирующего или водоносного слоя // Докл. АН СССР. 1949. Т. LXIX. №5. С.619–622.

17. Нельсон-Скорняков Ф.Б. Притекание грунтовой воды со свободной поверхностью к системе дрен при глубоком залегании водоупора // Изв. АН СССР. ОТН. 1941. №1. С.126–128.

18. Нельсон-Скорняков Ф.Б. Движение грунтовой воды со свободной поверхностью через плотину с двумя диафрагмами // Изв. АН СССР. ОТН. 1941. №3. С.39–44.

19. Нельсон-Скорняков Ф.Б. Фильтрация в однородной среде. – М.: Советская наука, 1947.279 с., 2–е изд.,1949.568 с.

20. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971.1108 с.

ON THE EFFECT OF EVAPORATION OR INFILTRATION ON THE FREE GROUNDWATER SURFACE IN SOME PROBLEMS OF UNDERGROUND HYDROMECHANICS

Bereslavskiy E.N., Prirez A.V.

St. Petersburg State University of Civil Aviation

Two schemes of fluid flow under the rabbit of Zhukovsky are considered. Filtering is flat and steady, and the fluid flow satisfy Darcy's law. The movement occurs through an array of ground underlain by a waterproof base or well-permeable pressure aquifer. For study evaporation and infiltration to the free surface of groundwater is formulated a mixed boundary value problem of the theory of analytic functions, which is solved by the Polubarinova-Cochina's method.

Keywords: filtration, infiltration, evaporation, groundwater, free surface, tongue of Zhukovsky, Polubarinova-Cochina's method, complex velocity, conformal mappings, Fuchsian equation