

## О СИММЕТРИЧНОСТИ СИСТЕМ ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

А.Г. Буховец<sup>1</sup>, Т.Я. Бирючинская<sup>1</sup>, А.К. Горностаев<sup>2</sup>1. Воронежский государственный аграрный университет имени Императора Петра I  
([abuhovets@mail.ru](mailto:abuhovets@mail.ru))

2. Российский технологический университет (МИРЭА)

Аннотация. Рассматриваются модели систем, представленных фрактальными множествами. Показывается, что состояния таких систем, соответствующие точкам фрактала, обладают большим числом симметрий по сравнению с другими точками фазового пространства. Аналитически данный факт соответствует наличию доминирующего элемента среди всех элементов, генерируемых рандомизированными системами итерированных функций.

Ключевые слова: рандомизированные системы итерированных функций, фрактальные множества, замкнутые системы, число симметрий состояния системы.

**Введение.** Будем рассматривать модель системы, внешние границы которой задаются некоторым множеством точек  $Z = \{Z_j\}$ , а множество внутренних состояний определяется действием рандомизированной системы итерированных функций (РСИФ) [1,2]. Система итерированных функций задаётся уравнениями  $X_n = \xi X_{n-1} + (1 - \xi)Z_j^{(n-1)}$ , где  $Z_j^{(n-1)} \in Z$ , ( $j = 1, 2, \dots, K; n = 1, 2, \dots, N$ ),  $X_n \in R^m$ ,  $0 < \xi < 1$  – параметр системы. Такой вариант реализации РСИФ будем обозначать F1. Другой вариант, обозначаемый F2, будет заключаться в построении множества кортежей  $A_\xi^K = \{A_i\}$ , где  $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iK})$ , при этом координаты  $a_{ij}$  получаются путём случайного отнесения членов абсолютно сходящегося ряда  $\mu \sum \xi^n = 1$  ( $\mu$  – нормирующий множитель) в ячейки, соответствующие координатам кортежа. Сформированная в результате матрица  $A = \|a_{ij}\|_{N \times K}$  позволяет получить множество состояний системы  $X = AZ$ . Результаты выполнения процедур F1 и F2, являющиеся фракталами [4,5], можно видеть в [1,4].

**Геометрическая интерпретация задачи.** Рассмотрим следующую задачу, позволяющей дать геометрическую интерпретацию процедур построения фрактальных множеств. Стержень единичной длины – отрезок  $[0;1]$ , обозначим его как I, случайным образом делится на три части. Разбиением отрезка I будем называть его представление в виде суммы других меньших отрезков. В каких случаях из полученных разбиений можно будет составить треугольник?

Для геометрического решения этой задачи введём три неотрицательных величины:  $x > 0$ ;  $y > 0$  и дополнительную  $z = 1 - x - y$ . Очевидно, что будет выполняться условие  $x + y + z = 1$ . Величины  $x, y, z$  представляют длины получившихся при делении отрезков. Для того, чтобы из этих отрезков можно

было составить треугольник, необходимо и достаточно выполнение следующих условий (неравенства треугольника)

$$\begin{cases} x + y > z \\ x + z > y \\ y + z > x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1/2 \\ y < 1/2 \\ x + y > 1/2 \end{cases} \quad (1)$$

Геометрически это выглядит следующим образом. Координаты точек треугольника  $ABC$  соответствуют длинам отрезков, полученных при делении единичного отрезка, причём в  $\Delta DEF$  (рис.1) неравенства (1) выполняются, в других оставшихся фигурах – нарушаются, т.е.

$$\begin{cases} z > x + y & (\Delta ADF) \\ y > x + z & (\Delta ECF) \\ x > y + z & (\Delta DBE) \end{cases} \quad (2)$$

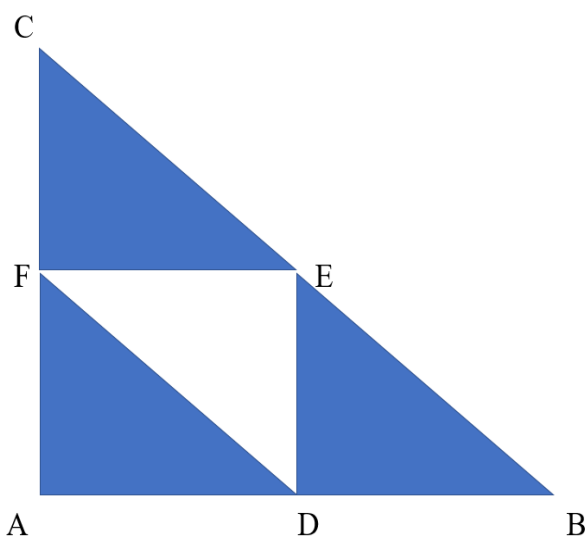


Рис.1  $\Delta DEF$  графическое решение систем (1)

Таким образом, в точках  $\Delta DEF$  выполняются требования условий (1). В то время как в  $\Delta ADF$ ,  $\Delta ECF$ ,  $\Delta DBE$  условия (1) нарушены, т.е. выполняется хотя бы одно из неравенств (2). Причём неравенство  $z > x + y$  выполняется в  $\Delta ADF$ ,  $y > x + z$  в  $\Delta ECF$ ,  $x > y + z$  в  $\Delta DBE$ . Эти неравенства имеет место почти для всех точек указанных треугольников, а случаи равенства, относящиеся к граничным точкам, имеющих нулевую меру, не будем принимать во внимание. Фактически это означает, что в каждом из вновь полученных треугольников  $\Delta ADF$ ,  $\Delta ECF$ ,  $\Delta DBE$  имеется в наличии доминирующая величина среди переменных  $x, y$  и  $z$ , т.е. величина, превышающая сумму двух других. В дальнейшем процесс выделения сторон треугольников путём разбиения доминирующего отрезка можно продолжить, практически неограниченно.

**Задание отношений эквивалентности в фрактальных множествах**, генерируемых РСИФ (на примере треугольника Серпинского). Оценим полученные результаты с топологической точки зрения. Для этого введём следующие отношения эквивалентности на множестве точек  $\Delta ABC$ . Пусть  $\alpha$ -отношение эквивалентности, соответствующие точкам разбиения отрезка  $[0;1]$ , из которых можно составить треугольник. Используя терминологию теории графов [8], можно сказать, что эти точки образуют простой цикл. Эти множества можно рассматривать как гомеоморфный образ простой замкнутой кривой. Точки, образующие эти множества, при построении треугольника Серпинского итерационным методом удаляются из дальнейшего рассмотрения. На рис.1 эти точки отмечены белым цветом. Можно показать, что суммарная площадь всех выброшенных в результате выполнения процедуры треугольников равняется площади исходного треугольника  $\Delta ABC$ . (Границы, имеющие нулевую меру, как было отмечено ранее, во внимание не принимаются). Заметим также, что среди сторон этих треугольников нет доминирующих (преобладающих) элементов. Для этого достаточно сравнить соотношения (1) и (2). Другие точки, оставшиеся после удаления точек множества  $\alpha$  будут соответствовать отношению  $\beta$ -эквивалентности. Эти точки образуют предфрактал треугольника/салфетки Серпинского.

**Подсчёт числа вариаций состояний системы.** Множества, отвечающие классам  $\alpha$  и  $\beta$  отношениям эквивалентности образуют дизъюнктивное покрытие всего множества точек  $\Delta ABC$ . Основное отличие объектов от  $\beta$  отношений эквивалентности заключается в следующем. Подсчитаем число способов, которыми можно упорядочить получившиеся при делении I отрезки  $x, y$  и  $z$ . Очевидно, что это число будет равняться числу перестановок из 3, т.е.  $3!=6$ . Однако, в силу цикличности множеств  $\alpha$ -эквивалентности, сочетания  $xuz, uxz, zxu$ , полученные путём циклических перестановок, не будут считаться различными. Тогда, множества  $\alpha$ -эквивалентности будут иметь только два способа упорядочения:  $xuz$  и  $xzu$  - в зависимости от выбранного направления обхода контура. (Заметим, что если в группу преобразований ввести ещё операцию изменения направления обхода контура, то число симметрий уменьшится вдвое.)

Для объектов класса  $\beta$ -эквивалентности число способов упорядочивания составит 6, поскольку эти множества не являются циклически замкнутыми, в отличие от множеств  $\alpha$ -эквивалентности. Будем упорядочивать эти сочетания по величине отрезков, их составляющих. Так для точек  $\Delta ADF$ , где доминирующим элементом является  $z$ , упорядочения будут  $zxu$  и  $zux$ , для  $\Delta ECF$  -  $uxz$  и  $uzx$ ,  $\Delta DBE$  -  $xuz$  и  $xzu$ . Как видим, поскольку объекты  $\beta$ -эквивалентности соответствуют незамкнутому пути в графе, т.е. цепи [8], их упорядочения представлены множеством линейных перестановок.

Точки  $\beta$ -эквивалентности можно получить с помощью процедуры РСИФ при задании определённых значений управляющих параметров процедур F1 и F2. Было показано [3], что множество этих точек является не связным

(вполне несвязным), и на этом множестве, если его перечислять с помощью процедуры F2, можно ввести ультраметрику, т.е. построить ультраметрическое пространство.

Можно считать, что точки  $\beta$ -эквивалентности обладают наибольшим значением числа диссиметрии, что, как было показано [9] может служить критерием, а точнее – необходимым условием системности заданного множества. С точки зрения этого принципа можно полагать, что совокупность этих точки соответствует состояниям внешней системы. Собственно, эти точки и образуют фрактальное множество. При обобщении этой процедуры на случай  $K > 3$ , среди отрезков, соответствующих делениям этими точками единичного отрезка I, как было геометрически продемонстрировано выше, имеется доминирующий и поэтому из этих отрезков нельзя составить замкнутый многоугольник. Топологически полученная из этих отрезков фигура будет гомеоморфна некоторому интервалу, а, следовательно, и прямой [7] (Напомним ещё раз, что границы, имеющие нулевую меру, как было отмечено ранее, во внимание не принимаются). Для множества с  $\alpha$ -эквивалентности полученные при делении части единичного отрезки образуют в общем случае замкнутый многоугольник.

**Заключение.** Среди всех возможных состояний замкнутой внешней системы имеются классы состояний, которые обладают большим числом вариаций/диссиметрий, чем другие состояния. Очевидно, что система будет чаще пребывать в таких состояниях, нежели в других возможных. Именно эти состояния системы и будут наблюдаться в проводимых экспериментах, поскольку эти состояния соответствуют, как было показано, фрактальным структурам.

Ещё одно замечание. Как известно, мера Лебега фрактального множества равняется нулю [6]. Поэтому связывать вероятность пребывания системы в данной точке фрактала с мерой было бы некорректно. Но для оценки вероятности пребывания системы в заданном объёме фазового пространства предлагается использовать любую фрактальную размерность – Хаусдорфа-Безековича или Реньи [5], нормированную соответствующим образом. Однако эти предположения требуют отдельного дальнейшего обоснования.

#### Литература

1. Barnsley M.F. Superfractals / M.F. Barnsley – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 464 p.
2. Bukhovets, A. G. Modeling of fractal data structures / A. G. Bukhovets, E. A. Bukhovets // Automation and Remote Control. – 2012. – Vol. 73. – No 2. – P. 381-385. – DOI 10.1134/S0005117912020154.
3. Bukhovets, A. G. Ultrametric properties of the attractor spaces for random iterated linear function systems / A. G. Bukhovets, P. V. Moskalev // Journal of Physics: Conference Series, Voronezh, 18–20 декабря 2017 года. – Voronezh: Institute of Physics Publishing, 2018. – P. 012028. – DOI 10.1088/1742-6596/973/1/012028.
4. Буховец, А. Г. Моделирование состояний замкнутых систем посредством рандомизированных систем итерированных функций / А. Г. Буховец, А. К. Горностаев // Физико-математическое моделирование систем: Материалы XXI Международного семинара, Воро-

неж, 30 ноября 2019 года. – Воронеж: Воронежский государственный технический университет, 2020. – С. 27-30. – EDN FVMCSE.

5. Буховец, А. Г. Моделирование структур данных в задачах классификации: математические модели классификационных задач – теория и практика / А. Г. Буховец. – Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2012. – 247 с. – ISBN 9783659981074.

6. Буховец, А. Г. Структура аттрактора рандомизированных систем итерированных линейных функций / А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская // Вестник ВГУ, Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 2. – С. 5-10.

7. Введение в топологию: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Математика" / Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Я. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко. – 2-е издание, дополненное. – Москва: Наука, 1995. – 414 с. – ISBN 5-02-014118-6. – EDN ZERCER.

8. Борзунов, С. В. Задачи по дискретной математике / С. В. Борзунов, С. Д. Кургалин. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2016. – 528 с. – ISBN 978-5-9775-3672-1. – EDN VJMYNB.

9. Шрейдер Ю.А. Системы и модели/ Ю.А. Шрейдер, А.А. Шаров //М.: Радио и связь, 1982. – 152 с.

## ON THE SYMMETRY OF FRACTAL STRUCTURE SYSTEMS

A.G. Bukhovets<sup>1</sup>, T.Y. Biryusinskaya<sup>1</sup>, A.K. Gornostaev<sup>2</sup>

1. Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter I

2. Russian Technological University (MIREA)

**Annotation.** Models of systems represented by fractal sets are considered. It is shown that the states of such systems corresponding to the points of the fractal have a large number of symmetries compared to other points of the phase space. Analytically, this fact corresponds to the presence of a dominant element among all elements generated by randomized systems of iterated functions.

**Keywords:** randomized systems of iterated functions, fractal sets, closed systems, stable states of the system.