УДК 517.927.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

 КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

С СИММЕТРИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет, Махачкала

gusen\_e@mail.ru

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) четвертого порядка часто встречаются в механике твердых тел. Получены условия существования и единственности положительных решений уравнений колебаний упругой балки. Большая часть этих результатов получена понижением порядка рассматриваемых задач до краевых задач для ОДУ второго порядка и последующим сведением к эквивалентному интегральному уравнению. Дальнейшее исследование проводилось различными топологическими приемами, основанными, в основном, на принципе неподвижной точки оператора и его вариациях в пространствах с конусом. Среди последних публикаций в данном направлении выделим работы [1,2].

В предлагаемой работе получены достаточные условия существования, по крайней мере, одного положительного решения краевой задачи для нелинейного ОДУ четвертого порядка с симметричными граничными условиями. Для доказательства существования положительного решения исследуемой задачи была использована теорема Красносельского о растяжении (сжатии) конуса в полуупорядоченных пространствах. В близкой постановке задачи рассматривались в [3-5].

Ключевые слова: **к**раевая задача, положительное решение, конус, неподвижная точка, растяжение (сжатие) конуса.

Рассмотрим задачу

 $x^{\left(4\right)}\left(t\right)=f(t,x(t))$, $0<t<1$, (1)

 $x\left(0\right)=0$, $x^{''}\left(0\right)=x^{'''}(0)$, (2)

 $x\left(1\right)=0$, $x^{''}\left(1\right)=x^{'''}(1)$, (3)

где функция $f(t,u)$ предполагается неотрицательной и непрерывной на $\left[0,1\right]×[0,\infty )$, причем $f(∙,0)≡0$.

**Теорема.** При выполнении условий

1. $\lim\_{u\to 0^{+}}\max\_{0\leq t\leq 1}\frac{f(t,u)}{u}=0,$
2. $\lim\_{u\to +\infty }\min\_{0\leq t\leq 1}\frac{f(t,u)}{u}=\infty $

или

1. $\lim\_{u\to 0^{+}}\min\_{0\leq t\leq 1}\frac{f(t,u)}{u}=\infty ,$
2. $\lim\_{u\to +\infty }\max\_{0\leq t\leq 1}\frac{f(t,u)}{u}=0$

краевая задача (1) – (3) имеет, по крайней мере, одно положительное решение.

Литература

1. Zhang Y., Chen L. Positive solution for a class of nonlinear fourth-order boundary value problem // AIMS Math.. 2023. Vol.8. P.1014-1021.
2. Chen H., Cui Y. Existence and uniqueness of solutions to the nonlinear boundary value problem for fourth-order differential equations with all derivatives // J. Inequal. Appl.. 2010. Vol.40. Issue 1. P.13-26.
3. Абдурагимов Э. И. Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. 2014. Т.10. № 121. С. 9-16.
4. Абдурагимов Г. Э., Абдурагимова П. Э., Курамагомедова М.М. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т.136. № 25. С. 341-347.
5. Абдурагимов Г. Э., Абдурагимова П. Э., Курамагомедова М.М. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка // Математические заметки СВФУ. 2022. Т.4. № 29. С. 3-10.

ABOUT THE EXISTENCE OF A POSITIVE SOLUTION

 BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE NONLINEAR

DIFFERENTIAL EQUATION FOURTH ORDER

WITH SYMMETRICAL BOUNDARY CONDITIONS

G. E. Abduragimov

Dagestan State University

Boundary value problems for fourth order ordinary differential equations (ODEs) are often encountered in solid mechanics. Conditions for the existence and uniqueness of positive solutions to the vibration equations of an elastic beam are obtained. Most of these results were obtained by reducing the order of the problems under consideration to boundary value problems for second-order ODEs and subsequent reduction to an equivalent integral equation. Further research was carried out using various topological techniques, based mainly on the principle of the fixed point operator and its variations in spaces with a cone. Among the latest publications in this direction, we highlight the works [1,2].

In the proposed work, sufficient conditions for the existence of at least one positive solution to the boundary value problem for one fourth-order nonlinear ODE with symmetric boundary conditions are obtained. To prove the existence of a positive solution to the problem under study, Krasnoselsky’s theorem on the stretching (compression) of a cone in semi-ordered spaces was used. In a similar formulation, the problems were considered in [3-5].

Keywords: boundary value problem, positive solution, cone, fixed point, expansion (compression) of the cone.