УДК 517.9

**О фундаментальном решении сингулярного оператора теплопроводности.**

**Д. А. Моисеев**

Воронежский государственный технический университет

dimonmoiseev48@mail.ru

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается задача о нахождении фундаментального решения сингулярного оператора теплопроводности, содержащего оператор Бесселя с индексом . Введено преобразование Бесселя специального вида, которое позволяет свести поставленную задачу к вычислению известного интеграла Вебера. Полученное фундаментальное решение при представляет собой фундаментальное решение классического оператора теплопроводности.

**Ключевые слова:** Сингулярный оператор теплопроводности, оператор Бесселя, билинейная форма, распределение Дирака—Киприянова, преобразование Бесселя, фундаментальное решение.

**Введение**

Сингулярный дифференциальный оператор теплопроводности имеет вид:

В работе [1] использованы и функции Бесселя, которые являются линейно независимыми решениями сингулярного дифференциального уравнения

и имеют следующее представление через функции Бесселя 1-го рода:

Рассматривается подпространство основных функций Л. Шварца , состоящее из четных функций. Соотвествующее пространство обобщенных функций, порожденное весовой билинейной формой

будем обозначать .

Обобщенная функция Дирака-Киприянова определена в [1]:

Также из работы [1] известно, что оператор эрмитов (самосопряжен по Лагранжу) в весовой билинейной форме (4):

**Определение:** *Фундаментальным решением сингулярного оператора теплопроводности будем называть регулярную обобщенную функцию , который является решением уравнения*

Пусть определено в (1). Для нахождения фундаментального решения оператора (1) в данной работе введено -преобразование Бесселя, которое определено как:

**1. преобразование Бесселя**

Взаимообратное преобразование Ханкеля произвольного порядка для определено в работе [3] с.205:

Пусть и . Учитывая равенства (5) и (3) запишем:

Следовательно, если , то:

Таким образом, мы имеем два взаимно обратных преобразования

Преобразования (6) и (7) в дальнейшем будем называть -преобразованиями Бесселя.

преобразование Бесселя обладает всеми необходимыми свойствами для нахождения фундаментального решения оператора (1).

**Лемма 1.** .

**Доказательство.**

**Лемма 2.** *.*

**Доказательство**. Доказательство напрямую следует из определения распределения Дирака-Киприянова (см [1]).

**2. Фундаментальное решение сингулярного оператора теплопроводности**

Для нахождения фундаментального решения оператора (1) применим к обеим частям уравнения

-преобразование Бесселя и воспользуемся леммами 1 и 2. В результате получим

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка решение которого хорошо известно, например cм [5]:

Теперь нам необходимо найти обращение преобразования Бесселя от функции (8):

Последний интеграл представляет собой первый экспоненциальный интеграл Вебера (см [4], c 431), используя который запишем:

Таким образом, с помощью -преобразования Бесселя и интеграла Вебера мы получили формулу фундаментального решения уравнения (2) при условии :

**Заключение**

В настоящей работе получено фундаментальное решение сингулярного оператора теплопроводности, которое выражается формулой (9). Кроме того, при формула (9) представляет собой фундаментальное решение классического оператора теплопроводности.

**Благодарности**

Автор работы выражает искреннюю благодарность профессору Л. Н Ляхову за поставленную задачу и консультации в процессе ее решения.

**Литература**

1. Л. Н. Ляхов “Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром” / Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е. Л. Санина // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2023. — № 7. — С. 52-65.

2. Л. Н. Ляхов “Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха” / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. — 2023. — № 133:4. — С. 517-528.

3. Земанян А. Г., Интегральные преобразования обобщенных функций, Наука, М., 1974, 399 с.

4. Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций. Ч. 1, перевод с англ. В. С. Бермана, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1949, 799 с.

5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 528 c.

6.Heywood P., Rooney P.G.//Can. J. Math. 1988. V.40. № 4. P. 989 -1009.

**On the fundamental solution of the singular thermal conductivity operator.**

**D. A. Moiseev**

Voronezh State Technical University

dimonmoiseev48@mail.ru

**Annotation**. In this paper, we consider the problem of finding a fundamental solution to the singular thermal conductivity operator containing the Bessel operator with index . The Bessel transformation of a special kind is introduced, which allows us to reduce the task to calculating the well-known Weber integral. The obtained fundamental solution for is a fundamental solution of the classical thermal conductivity operator.

**Keywords:** Singular heat conduction operator, Bessel operator, bilinear form, Dirac—Kipriyanov distribution, Bessel transformation, fundamental solution.