УДК 519.673

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В ЗАДАЧАХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ КОНТИНУУМОВ

С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ НА ГРАФЕ

И.В. Перова

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

writeira@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается дифференциальный оператор эллиптического типа, а также аппроксимация в анализе решений задач колебаний упругих континуумов с пространственной переменной, изменяющейся на графе. Анализ математических моделей малых упругих колебаний конструкций, структурно ассоциированных с графом-деревом, в прикладных задачах направлен на описание количественных характеристик изменения амплитуд колебаний для предотвращения нежелательных (и даже опасных) колебаний, ведущих к различного рода неустойчивостям механических конструкций. Рассматриваются разностные аналоги дифференциального оператора, соответствующие математическим моделям вышеупомянутых конструкций.

**Ключевые слова***:* аппроксимация дифференциального оператора, граничные задачи на графе, вычислительные методы анализа упругих колебаний.

Современные промышленные устройства и системы зачастую допускают представление в виде одномерных континуумов, взаимодействующих только через концы. Протекающие в таких устройствах процессы допускают формирование соответствующих математических моделей, реализуемых на геометрическом графе. На рёбрах графа устанавливаются соотношения, описывающие закономерности функционирования системы, во внутренних узлах – условия взаимодействия смежных континуумов, в граничных узлах – граничные условия, характерные для конкретной системы (устройства). Таким образом, математические модели разных прототипов изначально имеют общее свойство быть граничными задачами для уравнений, в большинстве своём являющихся уравнениями с распределёнными параметрами на графе.

Введем следующие обозначения, принятые в работе [2]. Обозначим через простейший граф (последовательно соединенные отрезки, называемые ребрами графа и обозначаемые ), – граница графа – граф-звезда (конечное число ребер, имеющих одну общую точку, называемую узлом и обозначенную ), – цепочка из L последовательно соединенных звёзд.

Пусть – множество функций , где через обозначено множество непрерывных на функций, через – множество функций, имеющих во всех точках каждого ребра, исключая концевые точки, производные второго порядка. При этом первая производная множества удовлетворяет условиям:

(1)

где ai – коэффициент, фиксированная постоянная.

Обозначим через – множество функций , удовлетворяющих условиям согласования в узлах :

(2)

в узле

(3)

в узлах , где число ребер в L-й звезде цепочки

На функциях , принадлежащих многообразиям и определим дифференциальные операторы и соотношением

(4)

граф – один из , , Областями определения операторов являются множества , ( ), элементы которых удовлетворяют граничным условиям:

(5)

где число соответствует

На сетках , графов , рассмотрим конечно-разностные аналоги дифференциальных операторов .

 **Конечно-разностные аналоги дифференциальных**

**операторов на графе.**

Разобьем ребра графа на интервалы длиной h (h - шаг сетки)

Введём разностные выражения

для сеточных функций .

Рассмотрим случай . Пусть - сеточная функция с компонентами , и пусть - множество сеточных функций , удовлетворяющих соотношениям:

, (6)

Оператор имеет представление

(7)

область определения этого оператора – множество сеточных функций , обращающихся в нуль на границе сетки , т. е. функции удовлетворяют условиям:

(8)

Соотношения (6)-(8) являются разностными аналогами соотношений (1), (4), (5).

Пусть далее . Множество сеточных функций определяется соотношениями:

(9)

(10)

Оператор на сеточных функциях  ∈  имеет представление:

(11)

здесь – число рёбер в j-й звезде цепочки (j = ); – сеточная вещественная функция; областью определения этого оператора является множество сеточных функций , удовлетворяющих условиям

(12)

Соотношения (9) – (12) являются разностными аналогами соотношений (2) – (5).

**Аппроксимации волнового уравнения на графе**

Пусть ℜ(t) – линейное многообразие функций , для каждого фиксированного , принадлежащих множеству ℜ, каковым может быть одно из рассмотренных выше множеств и . Рассмотрим задачу

(13)

на функциях , где – множество функций , удовлетворяющих условию

(14)

Причем

здесь , – множество функций, заданных на , оператор – один из операторов и .. Будем считать, что сформулированная задача (13)-(14) имеет единственное решение и это решение непрерывно в производные (=1,2), (ζ = 1,2,3,4) непрерывны в области .

Аппроксимации задачи (13)-(14) имеет два этапа. Сначала эту задачу аппроксимируем в области по пространственной переменной. В результате приходим к дифференциальному уравнению по времени и разностному по пространственной переменной. Предположим, что это проделано, приходим к задаче вида

(15)

где – проекции функций на сетку , сеточные функции времени t; конечно-разностный оператор может быть одним из операторов и .

Для задачи (15) имеет место явная разностная схема с погрешностью :

где – компоненты проекции функции на сетку

где можно принять.

Литература

1. Перова И.В. Тимошенко В.В. Априорные оценки для дифференциально-разностной системы с пространственной переменной на графе // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2022): сборник трудов Международной научной конференции. - Воронеж: Воронежский государственный педагогический университет, 2022. - С. 56-57.
2. Провоторов В.В. Собственные функции краевых задач на графах и приложения. - Воронеж: Научная книга, 2008. - 247 с.

APPROXIMATION DIFFERENTIAL OPERATORS

IN PROBLEMS OF OSCILLATIONS OF ELASTIC CONTINUUMS

WITH A SPATIAL VARIABLE ON A GRAPH

I.V Perova

Voronezh State University,

[writeira@mail.ru](mailto:writeira@mail.ru)

**Abstract.** An elliptic-type differential operator is considered, as well as an application in the analysis of solutions to problems of oscillations of elastic continuums with a spatial variable changing on a graph. The analysis of mathematical models of small elastic vibrations of structures structurally associated with a graph tree in applied problems is aimed at describing the quantitative characteristics of changes in oscillation amplitudes to prevent undesirable (and even dangerous) fluctuations leading to various kinds of instabilities of mechanical structures. The difference analogues of the differential operator corresponding to the mathematical models of the above-mentioned constructions are considered.